Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 9 **SoSe 2015** **Abgabe: 25.06.2015**

[H22] Zwei Delta-Zacken **(3 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Dimension im Potential

$$V(x) \;=\; -V_0\left[\delta(x{+}a) + \delta(x{-}a)\right] \qquad \text{mit} \qquad V_0 > 0 \quad \text{und} \quad a > 0\ .$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Energieeigenwerte der Bindungszustände.
Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Potentials.

(b) Lösen Sie die Gleichungen für die Grenzfälle $a \to 0$ und $a \to \infty$. Skizzieren Sie die Eigenwerte als Funktion von a.

Bemerkung: Dies ist ein Modell für das H_2^+-Ion. Die Annäherung der Kerne ist energetisch günstig und führt zur chemischen Bindung.

[H23] Verallgemeinerter Potenzreihenansatz **(4 Punkte)**

Gegeben sei für ein Teilchen der Masse m auf der Halbachse $x > 0$ das Potential

$$V(x) \;=\; \tfrac{m\omega^2}{2}\, a^2 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2 .$$

(a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung durch Einführung einer dimensionslosen Variablen $\xi = \beta x$ auf die Form

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - \frac{\beta^4 a^4}{\xi^2} - \xi^2 + 2(\epsilon + \beta^2 a^2)\right]\psi(\xi) \;=\; 0\ ,$$

wobei $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ und $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ sowie $\psi(\xi) = \frac{\hbar\omega}{2}\phi_E(x)$.

(b) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion ψ für $\xi \to \infty$.

(c) Man mache den Ansatz

$$\psi(\xi) \;=\; W(\xi)\,\mathrm{e}^{-\xi^2/2} \qquad \text{und} \qquad W(\xi) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \xi^{s+n} \qquad \text{mit} \quad a_0 \neq 0\ .$$

Gewinnen Sie eine Differentialgleichung für W.

(d) Bestimmen Sie aus dieser Differentialgleichung den Wert von s und leiten Sie eine Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten a_n her.

(e) Das asymptotische Verhalten von ψ erfordert, dass die Reihe für $W(\xi)$ abbricht. Ermitteln Sie aus dieser Bedingung das Energiespektrum.

Bitte wenden

[H24] Kohärente Zustände **(3 Punkte)**

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem Eigenzustand des Vernichtungsoperators,

$$a\,|\alpha(t{=}0)\rangle \;=\; \alpha_0\,|\alpha(t{=}0)\rangle \qquad \text{für ein} \quad \alpha_0 \in \mathbb{C}\ .$$

(a) Bestimmen Sie diesen Eigenzustand, indem Sie $|\alpha(t{=}0)\rangle$ nach den Energieeigenfunktionen $|n\rangle$ entwickeln und die Entwicklungskoeffizienten berechnen. Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung des Zustands gegeben ist durch

$$|\alpha(t)\rangle \;\sim\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\,\mathrm{e}^{\alpha(t)\,a^\dagger}\,|0\rangle \qquad \text{mit} \qquad \alpha(t) \;=\; \alpha_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\ .$$

(b) Normieren Sie den Zustand $|\alpha(t)\rangle$ und berechnen Sie den Erwartungswert $\langle N\rangle$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit W_n an dafür, dass sich der Oszillator im n-ten Energieeigenzustand befindet, und drücken Sie diese als Funktion von $\langle N\rangle$ aus.

(c) Betrachten Sie $\langle H\rangle$ für große $\langle N\rangle$. Welche Größe läßt sich im Vergleich zur klassischen Theorie als Amplitude der Schwingung interpretieren?